

Notas de Cálculo 1 por Luiz Armando

1. Matemática Elementar

Triângulo de base a e altura h : área = $\frac{ah}{2}$

Círculo de raio r : circunferência = $2\pi r$; área = πr^2

Esfera de raio r : área = $4\pi r^2$; volume = $\frac{4\pi r^3}{3}$

Fórmula de Bhaskara: se $ax^2 + bx + c = 0$, $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)

Vértices: $x_v = -b/2a$ e $y_v = \Delta/4a$

Produto da soma pela diferença: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Trinômio quadrado perfeito: $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$

Soma e diferença de cubos: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

Binômio de Newton: $(x + a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$

Racionalização: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ (caso a raiz seja maior que 2: $\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a\sqrt[3]{b}}{b}$, onde o expoente do radicando conjugado deve ser: $x = \text{índice} - 1$)

Funções contínuas: polinomiais, racionais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e raízes.

Função modular: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

Notações do domínio de uma função: $D_f = \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{n\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} | (-\infty, n) \cup [n, \infty)\}$

Notações da imagem de uma função: $Im f = \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{n\}$ ou $(-\infty, n) \cup [n, \infty)$

1.1 Logaritmo

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

Propriedades:

- $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
- $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $a^{\log_a b} = b$
- $\log x = \log_{10} x$
- $\log_c b = \log_a b / \log_a c$

Logaritmo Natural: $\ln x = \log_e x \approx 2.718$

Funções logarítmicas são sempre bijetoras (possuem inversa).

1.2 Trigonometria

$D^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \Leftrightarrow D = L\sqrt{2}$

Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Radianos: $C = R\alpha \Leftrightarrow C = 2\pi R$ ($2\pi = 360^\circ$)

Ângulos	Radianos	Seno	Cosseno	Tangente
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	Indefinido
120°	$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1
150°	$5\pi/6$	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180°	π	0	-1	0
210°	$7\pi/6$	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
225°	$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1
240°	$4\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$
270°	$3\pi/2$	-1	0	Indefinido
300°	$5\pi/3$	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
330°	$11\pi/6$	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
360°	2π	0	1	0

Identidades Trigonômicas
$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$
$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$
$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
$\sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$
$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cdot \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \tan(\alpha) \pm \tan(\beta) / 1 \mp \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)$
$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

2. Limite (\mathbb{R})

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ se, para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe um } \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Propriedades:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = F \pm G.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot F.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = F \cdot G.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, \text{ se } G \neq 0.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = F^n, \text{ onde } n \text{ é um inteiro positivo.}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = a^n, \text{ onde } n \text{ é um inteiro positivo.}$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \text{ onde } n \text{ é um inteiro positivo (se for par: } a > 0).$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{F}, \text{ onde } n \text{ é um inteiro positivo (se for par: } F > 0).$

$$\text{Limite no infinito: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{n}{x} = 0$$

$$\text{Limite infinito: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{n}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{n}{x} = -\infty$$

Limites Fundamentais
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(nx)}{x} = n$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{x}\right)^x = e^n$

Teorema do confronto: se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$

3. Derivação (\mathbb{R})

$$\text{Notações: } y' \Leftrightarrow f'(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}$$

Coeficiente angular (m): $f'(x)$

Reta tangente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Derivadas	
n	0
x^n	nx^{n-1}
x^x	$x^x \cdot (\ln x + 1)$
\sqrt{x}	$1/2\sqrt{x}$
e^x	e^x
$\ln x$	x^{-1}
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x) \cdot \operatorname{ctg}(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x) \cdot \tan(x)$
$\operatorname{ctg}(x)$	$-\csc^2(x)$

3.1 Regras de Derivação

Regra do Produto: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$

Regra do Quociente: $f(x) = g(x)/h(x) \rightarrow f'(x) = (g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x))/(h(x))^2$

Regra da Cadeia: $f(x) = g(h(x)) \rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$f(x) = g(x)^{h(x)} \rightarrow f'(x) = g(x)^{h(x)} \cdot \left(h'(x) \cdot \ln(g(x)) + h(x) \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \right)$

3.2 Esboço de Gráficos

Domínio da função.

Interseções com os eixos: $f(x) = 0$ para encontrar x . $x = 0$ para encontrar y .

Assíntotas Horizontais: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Assíntotas Verticais: $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ (p representa os pontos de descontinuidade da função).

Intervalos de crescimento e decrescimento: $f'(x) > 0$, crescente. $f'(x) < 0$, decrescente.

Pontos Críticos: pontos onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x) = \nexists$.

Máximos e Mínimos: aplicar os pontos críticos, se houver, na função ($f(p.c.)$).

Concavidade: $f''(x) > 0$, concavidade p/ cima. $f''(x) < 0$, concavidade p/ baixo.

Pontos de Inflexão: $f''(x) = 0$ ou $f''(x) \nexists$

4. Integração (\mathbb{R})

Primitivas	
0	0
n	nx
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$

x^{-1}	$\ln x$
e^x	e^x
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sec^2(x)$	$\tan(x)$

Integral Indefinida: $\int f'(x) dx = f(x) + c$

Integral Definida (Integral de Riemann): $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC): $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

$$f(x) = \int_a^b g(x) dx \rightarrow f'(x) = g(b) - g(a)$$

4.1 Técnicas de Integração

Substituição simples: se $u = g(x)$, então $\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$.

Substituição trigonométrica: utilizar as identidades trigonométricas para simplificar a equação.

Integração por partes: $\int u dv = uv - \int v du$ (escolher u e v a partir da regra LIATE:

Logarítmica, Inversa, Algébrica, Trigonométrica, Exponencial)

Frações parciais: diante da função $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx$, se o grau de $f(x)$ for \geq ao de $g(x)$, primeiro deve-se realizar a divisão polinomial. A próxima etapa é fatorar o denominador $g(x)$ o máximo possível. A terceira etapa é expressar a função racional própria como uma soma das frações parciais da forma $\frac{A}{(ax+b)^i}$ ou $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$.

Produtos de senos e cossenos: utilizar as identidades trigonométricas para simplificar a equação.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) dx$$